

# Sistemi a CONTROLLO NUMERICO

ANNO Accademico 2012-2013

CORSO "Controlli Automatici"

UNIVERSITA' dell'Aquila - INGEGNERIA

AUTOMATICA-INF.  
ELETTRONICA  
TELECOMUNIC.

A CURA ING. BIANCHI DOMENICO

Appunti tratti dal Capitolo VII "Sistemi di Controllo" di Alberto Isidori

## Indice

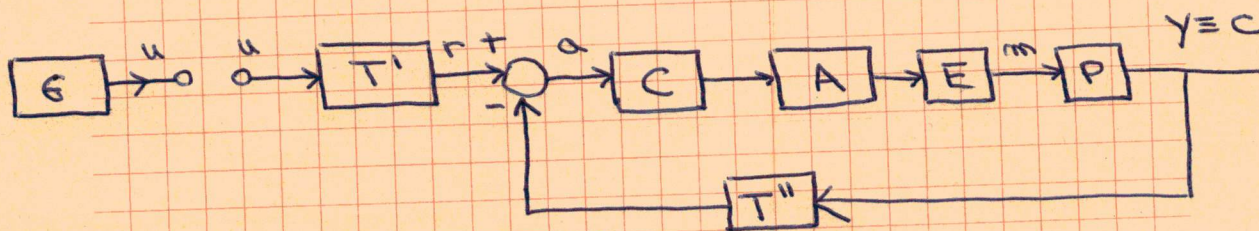
- 1 Introduzione
- 2 Analisi della risposta di un sistema a controllo numerico
- 3 La risposta in regime permanente nei sistemi di controllo a tempo discreto
- 4 La risposta transitoria nei sistemi di controllo a tempo discreto
- 5 Sintesi di sistemi a tempo di risposta finito



# 1 Introduzione

Un sistema di controllo a computerizzazione viene detto sistema a controllo numerico diretto quando le funzioni attribuite ai dispositivi di controllo vengono svolte in parte o totalmente da elaboratori elettronici.

La struttura di controllo considerata è la seguente



$u$  = comando

$r$  = riferimento

$a$  = grandezza agente

$m$  = grandezza controllata

$A$  = amplificatore

$y = c$  = grandezza controllata

$G$  = generatore z-fornimento

$T' = T'' = T'''$  = trasduttore

$C$  = computer

$E$  = esecutore

$P$  = Processo

L'aggettivo "diretto" indica che viene usato un elaboratore elettronico per generare la grandezza agente (confronto tra il riferimento e la grandezza controllata). Lo scopo è poi quello di generare una grandezza di controllo (legge di controllo) in base alla differenza dell'elaborazione della grandezza agente.

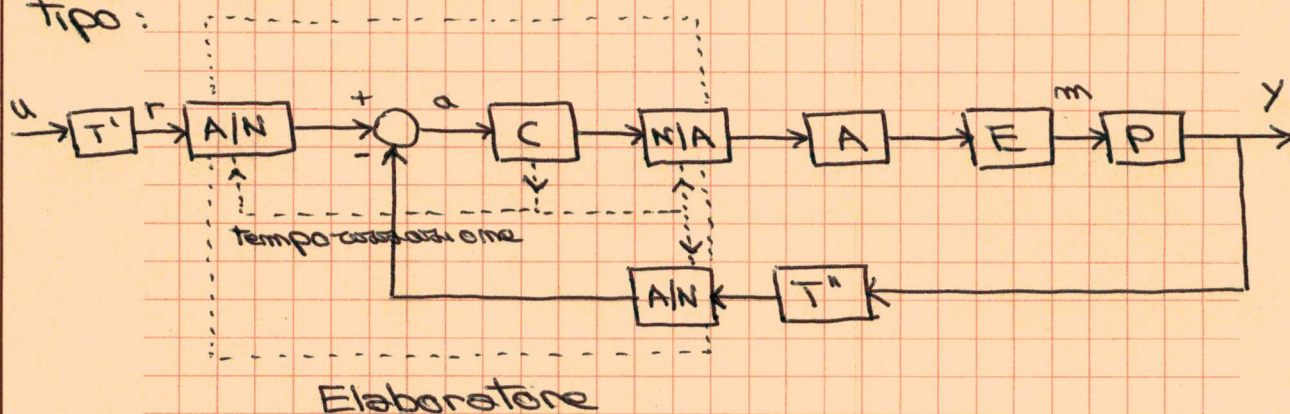
Al processo controllato corrispondono grandezze in ingresso e in uscita continue nel tempo e quindi per avere collegamenti con gli elaboratori è necessario interporre opportuni dispositivi di



2

conversione analogico-numerica e numerica-analogico.

Il sistema di controllo assume una struttura del tipo:



$u$  = comando

$r$  = riferimento

$a$  = grandezza agente

$m$  = // controllante

$y$  = // controllata

A/N = conversione analogica  $\rightarrow$  numerica

N/A = // numerica  $\rightarrow$  analogica

$T' = T''$  = trasduttore

C = calcolo

A = amplificatore

E = esecuzione

P = processo

La grandezza agente è sottoposta ad amplificazione di livello e di potenza quasi sempre per avere buone prestazioni, sia per sviluppare l'azione di controllo voluta a partire dalla piccolissima potenza associata alla grandezza agente.

In genere è necessaria una trasformazione della natura fisica della grandezza fornita dall'amplificazione in modo da consentire di agire su P; si tratta di una traslazione a livello di potenza per la quale si usa il termine ESECUZIONE.

Piero Cardin



3

Il ruolo dei dispositivi di conversione analogico-numerica è quello di produrre un'uscita, a partire dalla funzione di variabile continua in ingresso, a variabile discreta o intera i cui valori corrispondono con quelli assunti dalla funzione continua in istanti di tempo ugualmente intervallati.

In questo dispositivo avviene il processo di campionamento della funzione  $g(t)$

$$g'_T(h) = g(hT) \quad \text{con} \quad h = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

dove  $T$  è il periodo di campionamento e si ha un processo di arrotondamento o quantizzazione sui valori assunti da  $g'_T(h)$ .

In modo analogo il ruolo dei dispositivi numerico-analogici è quello di produrre in uscita a partire dalla variabile intera  $g'_T(h)$  una funzione continua nel tempo  $g(t)$  che soddisfa

$$g(hT) = g'_T(h).$$

Noi ci occuperemo di                      sistemi di controllo numerico dotato con un solo ingresso e una sola uscita.

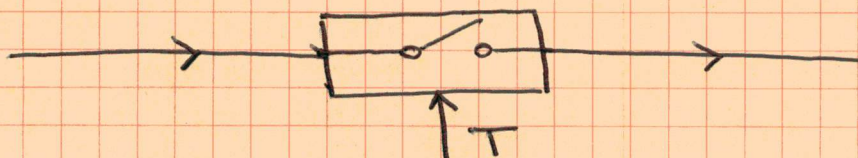
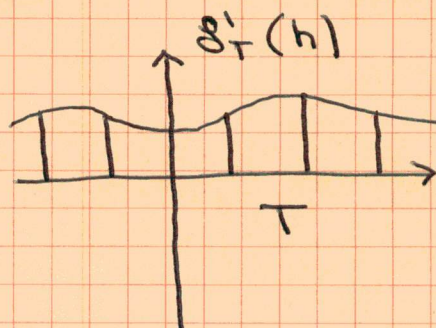
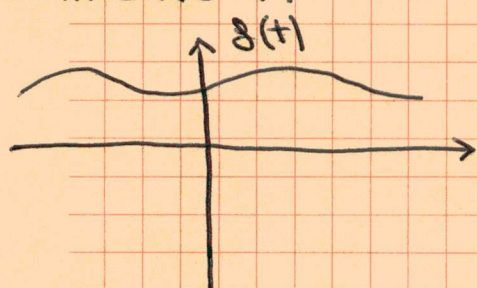
Vedremo come risolvere i soliti problemi a quello della sintesi di un controllore a tempo discreto; i passaggi sono molto simili a quelli sviluppati per sistemi tempo continuo.



## 2 ANALISI DELLA RISPOSTA DI UN SISTEMA A CONTROLLO NUMERICO

E' necessario, come primo passo, formalizzare le funzioni dei dispositivi di conversione interposti tra la parte tempo continua e quella tempo discreto.

Convertitore ANALOGICO-NUMERICO: si considera che sia ideale (senza arrotondamento) con passo di campionamento  $T$ .



$$g'_T(h) = g(hT) \quad h = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

L'errore che si commette è tanto minore quanto è più piccolo l'errore che il convertitore commette nell'arrotondare i valori della funzione  $g'_T(h)$  e cioè quanto è maggiore la lunghezza di parola su cui ~~opera~~ opera l'elaboratore.

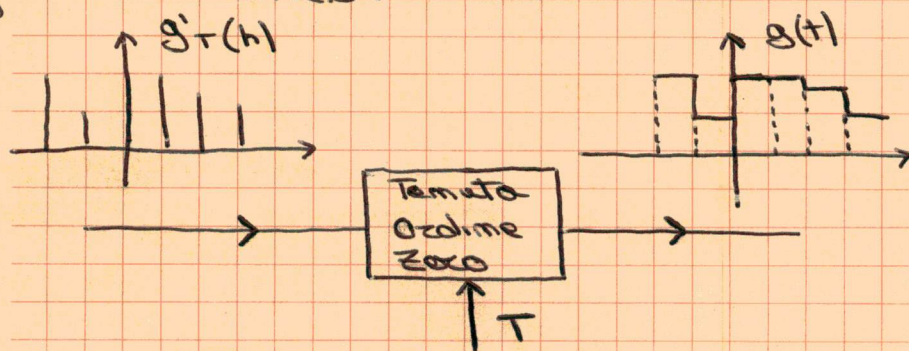
Convertitore NUMERICO-ANALOGICO:

$$g(t) = g'_T(h) \quad hT \leq t \leq hT + T$$

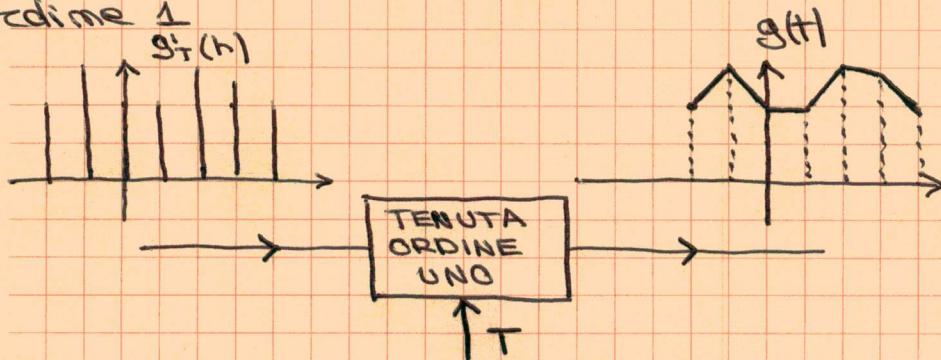


P5

Un dispositivo che associa un valore costante della funzione di ingresso in corrispondenza all'intero  $h$  nell'intervallo  $[hT, (h+1)T]$  prende il nome di organo di tenuta di ordine zero.



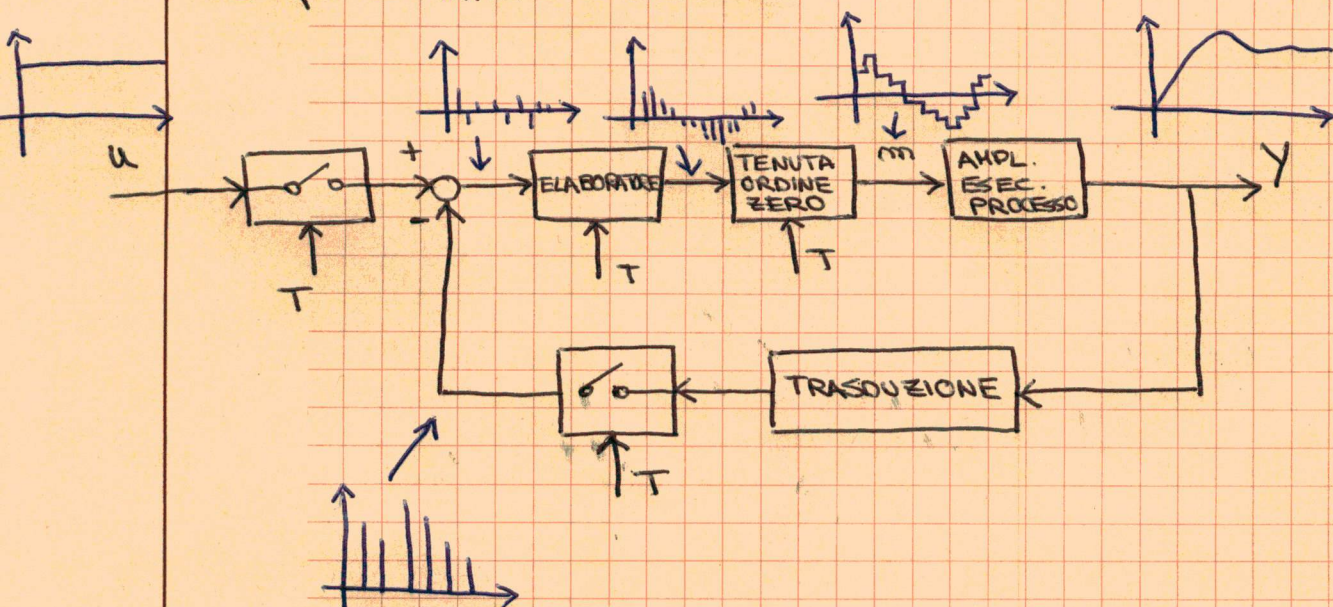
Oppure si può avere un dispositivo che nell'intervallo  $[hT, (h+1)T]$  produce in uscita una funzione che ha pendenza costante ed assume, negli estremi di tale intervallo, valori corrispondenti a quelli della  $g'_T(h)$ ; in tal caso si ha a che fare con un organo di tenuta di ordine 1.





P6

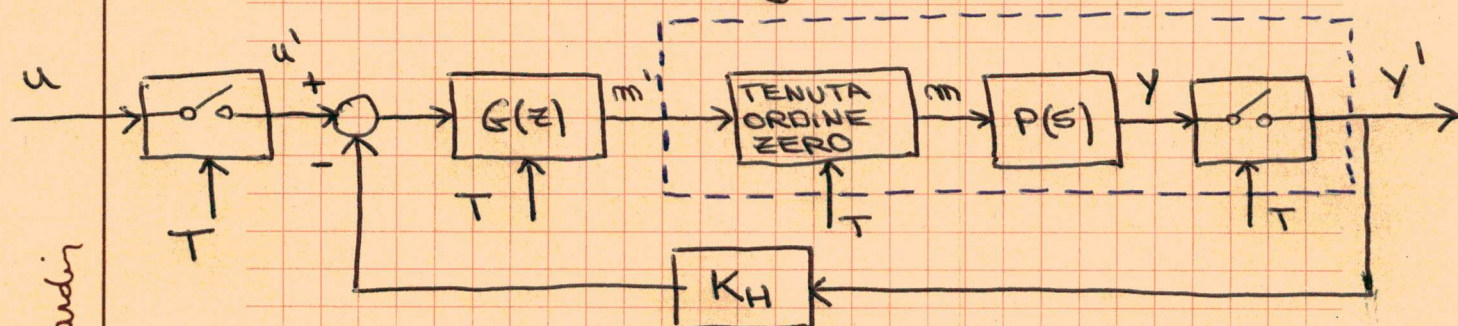
In questo modo si osserva che il sistema considerato presenta la seguente struttura in cui si indicano le funzioni nel tempo continuo e discrete



La parte relativa agli organi di amplificazione, esecuzione o al processo è composta da sottosistemi tempo continuo e la si può caratterizzare con una f.d.t.  $P(s)$ .

La parte di elaborazione è tempo discreto  $\Rightarrow G(z)$

Si ipotizza, infine, che l'organo di trasduzione sia tempo continuo. Lo schema di riferimento diventa



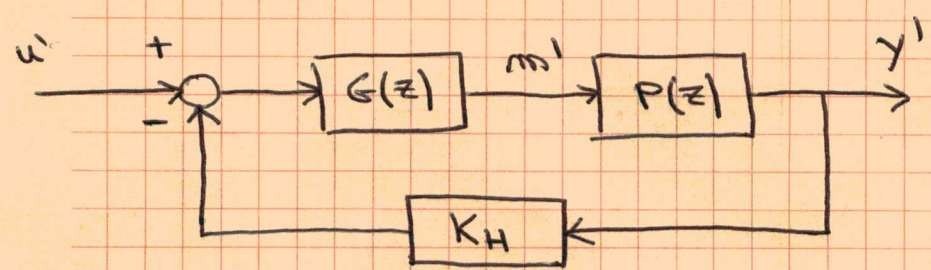
$K_H$  coefficient moltiplicativo che caratterizza il dispositivo di trasduzione.

Il blocco tratteggiato è un sistema a tempo discreto e lo si può caratterizzare con una f.d.t.  $P(z)$ .



P7

In tal caso il legame tra  $u'$  e  $y'$  può essere rappresentato nel seguente modo



schema che consente di calcolare (conoscere) l'uscita negli istanti di campionamento.  
 Al fine di poter usare questo schema per conoscere l'uscita occorre:

- ① sapere calcolare la  $P(z)$  a partire dalla conoscenza di  $P(s)$  e dell'organo di tenuta
- ② studiare, con i metodi della teoria dei sistemi a tempo discreto, il sistema descritto.

Per ora vediamo il punto ①.

oss: è noto dalla teoria dei sistemi che dato un sistema LTI tempo continuo, è possibile calcolare il sistema discreto derivante dalla discretizzazione di quello iniziale, ed è sempre lineare.

A, B, C, D	$\xrightarrow{\text{discretizzazione}}$	A <sub>0</sub> , B <sub>0</sub> , C <sub>0</sub> , D <sub>0</sub>
↓		↓
$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$		$P(z) = C(zI - A_0)^{-1}B_0 + D_0$

L'organo di tenuta lascia lineare il sistema.

Piero Cardin



P7bis

## Elementi principali trasformate de Laplace

$$\mathcal{L}[1] = 1 \quad \text{IMPULSO UNITARIO}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s} \quad \text{GRADINO}$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{1}{s^2} \quad \text{RAMPA LINEARE}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{s^{k+1}}$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at} \frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{(s-a)^{k+1}}$$

## Elementi principali trasformate Zeta

$$\mathcal{Z}[1] = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathcal{Z}[t] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}$$

$$\mathcal{Z}[a^t] = \frac{z}{z-a}$$

$$\mathcal{Z}[\sin(\omega t)] = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$$

$$\mathcal{Z}[\cos(\omega t)] = \frac{z(z - \cos(\omega))}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t^k}{k!} a^t\right] = \frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}$$

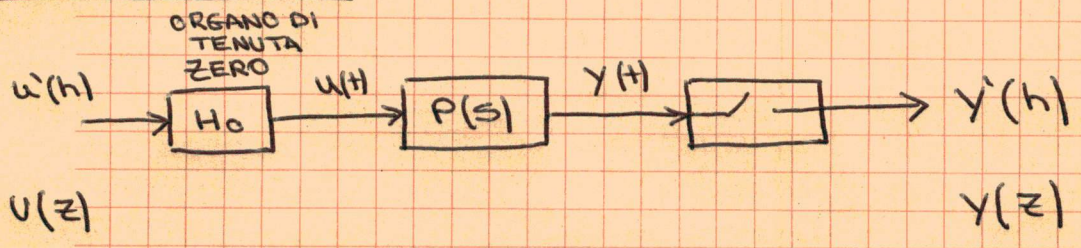
Pierre Cardin



P8

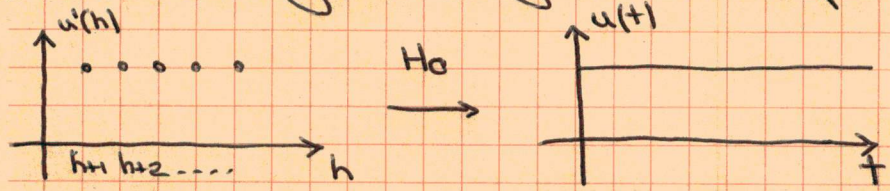
Chi è la  $P(z)$  e come si calcola?

PRIMO METODO



$$P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Si considera l'ingresso a gradino campionato



$$U(z) = Z[u'(h)] = \frac{z}{z-1} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Rivedere le trasformate} \\ \text{Zeta principale} \\ \text{Teoria dei sistemi} \end{array} \right]$$

oss:  $Z[g'(h)] = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{g'(h)}{z^h} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{g'(h)}{z^h}$

per il gradino si ha  $U(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{z}{z-1}$

Dallo schema a blocchi

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ P(s) \cdot \frac{1}{s} \right]$$

$$y'(h) = y(hs) = \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ P(s) \cdot \frac{1}{s} \right] \right)_{t=hs}$$

$$Y(z) = Z \left[ \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ P(s) \cdot \frac{1}{s} \right] \right)_{t=hs} \right]$$

$$P(z) = \frac{Z \left[ \left( \mathcal{L}^{-1} \left[ P(s) \cdot \frac{1}{s} \right] \right)_{t=hs} \right]}{Z[u(h)]}$$

Pierre Cardin



Esempio

Dato  $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ , calcolare la  $P(z)$  secondo gli schemi visti.

Svolgimento

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]_{t=hs} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1}\right]_{t=hs} =$$

$$= (At + B + Ce^{-t}) \mathcal{S}_{-1}(t) \Big|_{t=hs}$$

con

$$A = s^2 \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \Big|_{s=0} = 1 \quad C = (s+1) \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$B = \frac{d}{ds} \left( s^2 \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \right) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=0} = -1$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]_{t=hs} &= (t - 1 + e^{-t}) \mathcal{S}_{-1}(t) \Big|_{t=hs} = \\ &= (hs - 1 + e^{-hs}) \mathcal{S}_{-1}(hs) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right)_{t=hs}\right] &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\left(hs - 1 + (e^{-s})^h\right) \mathcal{S}_{-1}(hs)\right] = \\ &= \frac{z-1}{z} \left[ s \cdot \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-s}} \right] = \\ &= \frac{s}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-s}} = \frac{s(z-e^{-s}) - (z^2 - (1+e^{-s})z + e^{-s}) + z^2 z + 1}{(z-1)(z-e^{-s})} = \\ &= \frac{(s-1+e^{-s})z + (-se^{-s} - e^{-s} + 1)}{(z-1)(z-e^{-s})} = P(z) \end{aligned}$$



P10

OSS: vediamo come i poli si sono trasformati in zeri

$$P_1 = 0 \longrightarrow z_1 = 1$$

$$P_2 = -1 \longrightarrow z_2 = e^{-s}$$

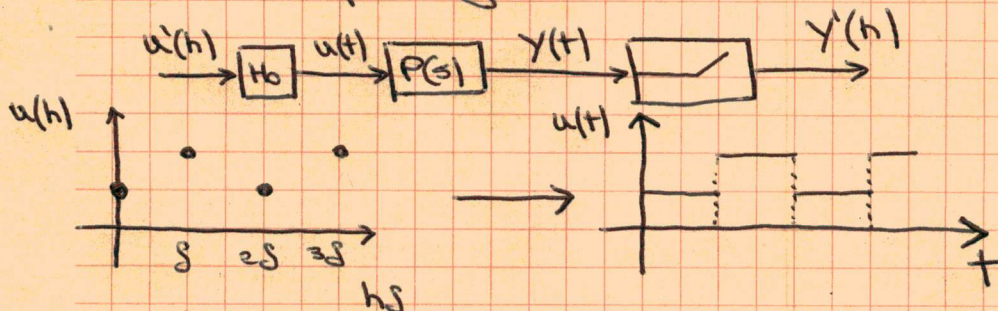
A poli della  $P(s)$  a parte reale negativa corrispondono poli della  $P(z)$  all'interno del cerchio unitario, quelli a parte reale positiva corrispondono fuori dal cerchio unitario.

Inoltre in  $P(s)$ ,  $m-m=2$ ,  
in  $P(z)$ ,  $m-m=1$

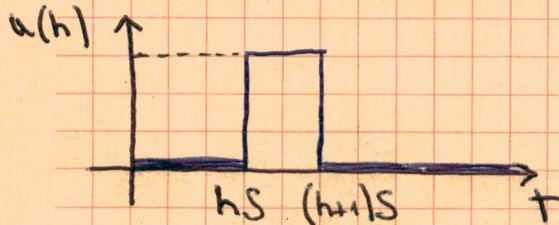
OSS: si può dimostrare che la  $P(z)$  che viene dal campionamento  $m-m$  ha <sup>diff. POLI-ZERI</sup> sempre pari a 1.

## II metodo per il calcolo della $P(z)$

Lo schema è sempre uguale



Consideriamo un generico blocco



$u(h)$  è la composizione di due gradienti

$$u(h) [s_{-1}(hs) - s_{-1}((h+1)s)]$$

ed applichiamo tanti ingressi di questo tipo.

$$u(t) = \sum_{h=0}^{+\infty} u(h) [s_{-1}(hs) - s_{-1}((h+1)s)]$$

o più in generale

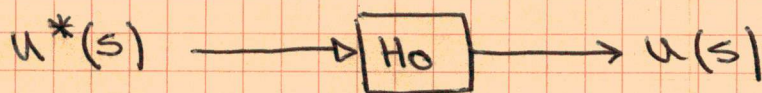
$$\sum_{h=0}^{+\infty} u(h) [s_{-1}(t-hs) - s_{-1}(t-(h+1)s)]$$



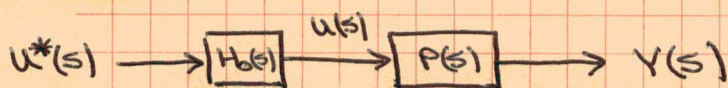
P11

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[u(t)] &= \sum_{h=0}^{+\infty} u(h) [\mathcal{L}[s_{-1}(t-hs)] - \mathcal{L}[s_{-1}(t-(h+1)s)]] = \\
 &= \sum_{h=0}^{+\infty} u(h) \left( \frac{e^{-hss}}{s} - \frac{e^{-(h+1)ss}}{s} \right) = \\
 &= \sum_{h=0}^{+\infty} u(h) \frac{1-e^{-ss}}{s} e^{-hss} = \frac{1-e^{-ss}}{s} \sum_{h=0}^{+\infty} u(h) e^{-hss} = \\
 &= \frac{1-e^{-ss}}{s} \sum_{h=0}^{+\infty} u(h) \mathcal{L}[s(t-hs)]
 \end{aligned}$$

$\underbrace{\frac{1-e^{-ss}}{s}}_{\text{Pu' come visto come la Trasformata di Laplace di } H_0}$ 
 $\underbrace{\sum_{h=0}^{+\infty} u(h) \mathcal{L}[s(t-hs)]}_{u^*(s)} \rightarrow \text{successione di impulsi di Dirac in } h s \text{ e di area } u(h)$



Dato che  $u^*(t) = \sum_{h=0}^{\infty} u(h) s(t-hs)$ , cioè ingressi fatti da impulsi, in effetti all'organo da tenuta arrivano dei numeri visti come tali e quindi tutto torna.  
 Consideriamo anche  $P(s)$  e calcoliamo l'uscita



$$\begin{aligned}
 Y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[P(s)u(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\underbrace{P(s)H_0(s)}_{\tilde{P}(s)} u^*(s)] = \\
 &= \mathcal{L}^{-1}[\tilde{P}(s)u^*(s)]
 \end{aligned}$$

oss:  $\mathcal{L}\left[\int_0^+ g(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}(g(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t)) = F(s) \cdot G(s)$

$$Y(t) = \int_0^+ \tilde{P}(t-\tau) u^*(\tau) d\tau = \int_0^+ \tilde{P}(t-\tau) \sum_{h=0}^{\infty} u(h) s(\tau-hs) d\tau =$$

Pierre Cardin



P12

$$= \sum_{h=0}^{\infty} u(h) \int_0^t \underbrace{\tilde{p}(t-\tau) S(\tau-hS)}_{\neq 0 \text{ per } \tau=hS} d\tau = \sum_{h=0}^{\infty} u(h) \tilde{p}(t-hS)$$

Omettiamo apici e ~

Sono interessato agli istanti  $t = KS$

$$Y(KS) = \sum_{h=0}^{\infty} u(h) \tilde{p}(KS-hS) = \sum_{h=0}^{\infty} u(h) \cdot \underbrace{P(K-h)}_{\substack{\text{legame} \\ u(h) \leftrightarrow y'(h)}} = Y(K)$$

Dato da ci interessa  $P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z[Y(K)]}{Z[u(K)]}$ , si calcola

$$Z^{-1}[P(z)] = P(h)$$

$$P(z) = Z[P(h)] = Z\left[\mathcal{L}^{-1}\left(P(s) \cdot H_0(s)\right)\right]_{t=hS} =$$

$$= Z\left[\mathcal{L}^{-1}\left[P(s) \cdot \frac{1-e^{-sS}}{s}\right]\right]_{t=hS} =$$

$$= Z\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right]_{t=hS} - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s} e^{-sS}\right]_{t=hS} \stackrel{\text{INDICO}}{\leftarrow} q(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]$$

$$= Z[q(hS) - q((h-1)S)] = Q(z) - \frac{1}{z} Q(z) = \frac{z-1}{z} Q(z)$$

Quindi

$$P(z) = \frac{Z[Y(K)]}{Z[u(K)]} = \frac{z-1}{z} Q(z) \dots$$

Si usa sempre il metodo 1 perché più semplice.  
Vedremo diversi esempi per il calcolo della  $P(z)$ .

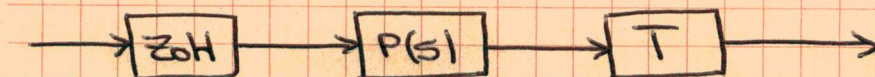
Pierre Cardin



13

Esercizio per il calcolo della  $P(z)$ 

Si consideri il seguente schema



dove  $ZOH$  è un organo di tenuta di ordine 0,  $T$  è un campionario con passo di campionamento  $T$  e  $P(s) = \frac{s+2}{s^2-1}$ . Calcolare la  $P(z)$ .

Svolgimento

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{s+2}{s(s^2-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}$$

Si può procedere in due modi

$$\textcircled{A} \quad A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{P(s)}{s} = -2$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{P(s)}{s} = \frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{P(s)}{s} = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{b} \quad \frac{s+2}{s(s^2-1)} = \frac{A(s^2-1) + Bs(s-1) + Cs(s+1)}{s(s^2-1)}$$

uguagliando le due espressioni si ottengono  $A, B, C$ .

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right)\Big|_{t=KT} = \left(-2 + \frac{1}{2}e^{-KT} + \frac{3}{2}e^{KT}\right) \delta_{-1}(KT)$$

$$\mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right)\Big|_{t=KT}\right) = -2 \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{3}{2} \frac{z}{z-e^T}$$

$$P(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right)\Big|_{t=KT}\right) = \frac{\alpha z + \beta}{(z-e^{-T})(z-e^T)}$$

$$\text{con } \alpha = \frac{3e^T + e^{-T} - 4}{2} \text{ e } \beta = \frac{e^T + 3e^{-T} - 4}{2}$$



P14

III

# La risposta in regime permanente nei sistemi di controllo a tempo discreto

Si analizza la risposta a R.P. per gli schemi di controllo a tempo discreto nel caso di ingressi e/o disturbi polinomiali e sinusoidali.

oss: verranno omissi gli apici nella notazione.

oss: NEL CONTINUO INGRESSI  $\frac{t^k}{k!}$  e  $\sin(\omega t)$

NEL DISCRETO INGRESSI  $\frac{h^{(k)}}{k!} = \frac{h(h-1)\dots(h-k+1)}{k!} = u(h)$

$$\sin(\omega h) = u(h)$$

$$\text{oss: } \mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = \frac{1}{s^{k+1}} \longrightarrow \mathcal{Z}\left[\frac{h^{(k)}}{k!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}$$

Prima di affrontare l'analisi della risposta x ingressi di tipo polinomiale conviene ricordare che, in un sist. a tempo discreto (come visto a Teoria dei sistemi) caratterizzato da una f.d.t.  $W(z)$ , la risposta a R.P. per un ingresso della forma

$$\tilde{u}(h) = \frac{h^{(k)}}{k!} \quad \left( \text{POLINOMIO FATTORIALE CANONICO DI ORDINE } k \right)$$

è la seguente

$$\tilde{y}(h) = c_0 \frac{h^{(k)}}{k!} + c_1 \frac{h^{(k-1)}}{(k-1)!} + \dots + c_{k-1} h^{(1)} + c_k$$

dove

$$c_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W(z)}{dz^i} \right|_{z=1}$$

Pierre Cardin

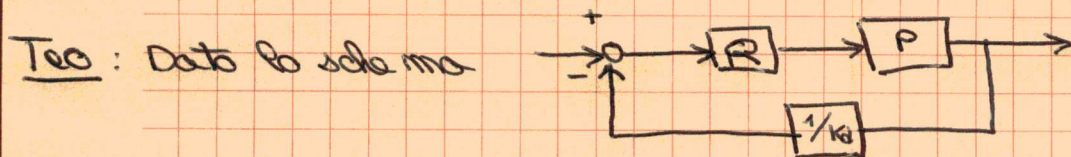


P15

del  
Dato uno schema di controllo a tempo discreto, il sistema è di tipo  $K$ , e l'errore a regime permanente

$$\tilde{e}(h) = y_d(h) - \tilde{y}(h) = K_d \frac{h^{(K)}}{K!} - \tilde{y}(h)$$

Sia una quantità costante e diversa da zero.



CNE S affinché il sistema sia di tipo  $K$  è da ci siano  $K$  poli in  $z=1$  nel ramo diretto (o come si vedrà la  $W_e(z)$  ha in  $z=1$  uno zero di molteplicità  $K$ ).

dimostrazione

Per la dimostrazione si utilizza il teorema del valore finale tempo discreto, analogo a quello tempo continuo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \leftrightarrow \tilde{e}(h) = \lim_{h \rightarrow \infty} e(h) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) E(z)$$

$$\tilde{e}(h) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) W_e(z) U(z)$$

$$W_e(z) = K_d - W(z) = K_d - \frac{R P}{1 + \frac{R P}{K_d}} = \frac{K_d}{1 + \frac{R P}{K_d}} =$$

$$\uparrow$$

$$e(h) = K_d u(h) - y(h)$$

$$= \frac{K_d^2}{K_d + R(z) P(z)} \Rightarrow \tilde{e}(h) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{K_d^2}{K_d + R(z) P(z)} \cdot \frac{z}{(z-1)^{K+1}} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z K_d^2}{K_d (z-1)^K + R(z) P(z) \cdot (z-1)^K} = e_K \rightarrow \text{errore per inganzo polinomiale di ordine } K$$

Pierre Cardin



P16

$$K=0 \quad e(h) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z K_d^2}{K_d + R P} = \frac{K_d^2}{K_d + R(1)P(1)} =$$

$$= \frac{K_d^2}{K_d + K_R K_P} = e_0$$

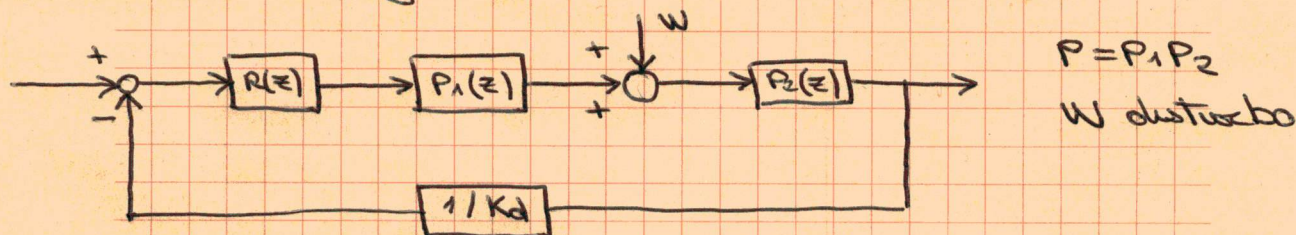
$K > 0$  Nel prodotto  $R(z)P(z)$  deve avere  $(z-1)^K$  al denominatore

$$e(h) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z K_d^2}{K_d (z-1)^K + \bar{R}(z)\bar{P}(z)} = \frac{K_d^2}{K_R K_P}$$

con  $K_R = \bar{R}(1)$  e  $K_P = \bar{P}(1)$ ,  $\bar{R}(z)$  e  $\bar{P}(z)$  opportune.

## SISTEMA DI CONTROLLO ASTATICO

Si consideri il seguente sistema di controllo



$P_2 = 1$ ,  $w$  agisce sull'uscita del processo

$P_1 = 1$ ,  $w$  = sull'ingresso =

$P_1$  e  $P_2$  generici,  $w$  agisce in mezzo al processo

Si ora introduce, in riferimento all'ingresso a gradino, il concetto di astaticismo.

def: il sistema di controllo è astatico per disturbo a gradino, la relativa risposta è nulla.

Vediamo qual è la cnes.

Pierre Cardin



P17

$$\tilde{y}_w(h) = \lim_{h \rightarrow \infty} y_w(h) = \lim_{z \rightarrow 1} (z^{-1} W_w(z) \cdot \frac{z}{z-1}) =$$

↑  
Teo. valore finale

$$= W_w(1)$$

quindi

$$\tilde{y}_w(h) = 0 \iff W_w(1) = 0$$

Così come fatto per il tempo continuo,

$$W_w(z) = \frac{P_2(z)}{1 + \frac{R(z) P_1(z) P_2(z)}{K_d}}$$

$\begin{aligned} R &= \frac{N_R}{D_R} \\ P_1 &= \frac{N_1}{D_1} \\ P_2 &= \frac{N_2}{D_2} \end{aligned}$

$=$

$$= \frac{N_2 D_R D_1}{D_R D_1 D_2 + \frac{N_R N_1 N_2}{K_d}}$$

Di conseguenza

$$\tilde{y}_w(h) = 0 \iff W_w(1) = 0 \iff \begin{cases} N_2(1) = 0 \\ \text{or} \\ D_1(1) = 0 \\ \text{or} \\ D_R(1) = 0 \end{cases}$$

$N_2(1) = 0$  NON Accettabile perché si parla del processo

$D_1(1) = 0$   
 $D_R(1) = 0$

}

CI DEVE ESSERE UN POLO  
IN  $z = 1$  A MONTE DEL PUNTO  
DI INGRESSO DEL DISTURBO  $w$

Pierre Cardin



Vediamo, infine, la risposta a regime permanente per ingressi di tipo sinusoidali

In questo caso valgono le considerazioni fatte per il tempo continuo. Le accenniamo rapidamente:

Dato un ingresso di tipo sinusoidale (o anche un disturbo)

$$\tilde{u}(h) = \sin(\Theta h)$$

la risposta a regime permanente ha la seguente forma

$$\tilde{y}(h) = |W(e^{j\Theta})| \sin(\Theta h + \angle W(e^{j\Theta}))$$

con  $W(z)$  f.d.t. discreta ( $z = e^{j\Theta}$ )

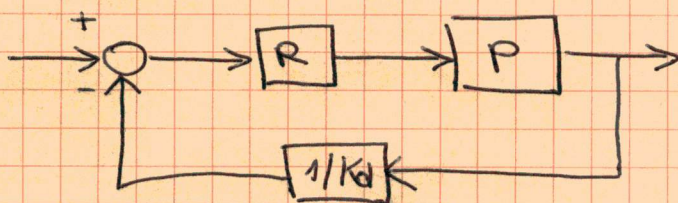
Tipicamente si hanno specifiche sulla grandezza dell'errore:

$$|\tilde{e}| \leq e_{\max} \quad \text{con } \Theta \in [0, \Theta_0]$$

$\Leftrightarrow$

$$|\tilde{e}| = |W_e(e^{j\Theta})| \leq e_{\max} \quad \text{con } \Theta \in [0, \Theta_0]$$

Nello schema di controllo



$$W = \frac{RP}{1 + \frac{RP}{K_d}}, \quad W_e = K_d - W = \frac{K_d}{1 + \frac{RP}{K_d}}$$

$$|W_e(e^{j\Theta})| = \frac{K_d}{\left| 1 + \frac{R(e^{j\Theta})P(e^{j\Theta})}{K_d} \right|} \leq e_{\max}$$

$$\left| 1 + \frac{R(e^{j\Theta})P(e^{j\Theta})}{K_d} \right| \geq \frac{K_d}{e_{\max}} \quad \Theta \in [0, \Theta_0]$$



P19

Una c.s. affinché la condizione sia vera è

$$\left| 1 + \frac{RP}{K_d} \right| \geq -1 + \left| \frac{RP}{K_d} \right| \geq \frac{K_d}{C_{max}}$$

$$\frac{R(e^{j\omega}) P(e^{j\omega})}{K_d} \geq \frac{K_d}{C_{max}} + 1$$

### FENOMENO DELLO SCOSTAMENTO IN FREQUENZA O ALIASING

Un fenomeno di cui è bene spendere due parole è quello che caratterizza i sistemi a tempo discreto quando gli ingressi o i disturbi sono

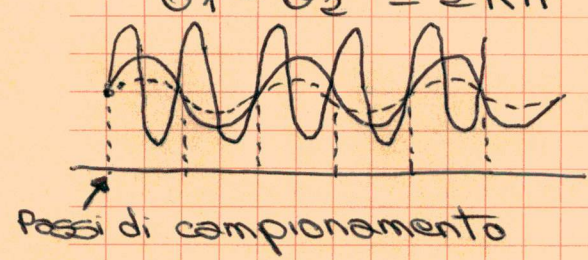
$$\tilde{u}_1(h) = \sin(\tilde{\omega}_1 h)$$

$$\tilde{u}_2(h) = \sin(\tilde{\omega}_2 h)$$

e  $\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$  è un multiplo intero di  $2\pi$ .

In questo caso assumono gli stessi valori se

$$\omega_1 - \omega_2 = 2K\pi \quad \text{con} \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



→ segnali che sono uguali negli istanti di campionamento, ma in generale diversi.

Questo accade anche se abbiamo 2 segnali continui che vengono campionati

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin \omega_1 t & \Rightarrow & & u_1(h) &= \sin(\omega_1 S h) & \omega_1 &= \omega_1 S \\ u_2 &= \sin \omega_2 t & \Rightarrow & & u_2(h) &= \sin(\omega_2 S h) & \omega_2 &= \omega_2 S \end{aligned}$$

e si verifica che

$$\begin{aligned} \omega_1 S K &= \omega_2 S K + 2K\pi & \text{con} & & K &= 0, \pm 1, \dots \\ \Downarrow & & & & & & \\ \omega_1 &= \omega_2 + \frac{2\pi}{S} K & \omega_c &= \frac{2\pi}{S} & \text{PULSAZIONE DI CAMPIONAMENTO} \end{aligned}$$

Pierre Cardin



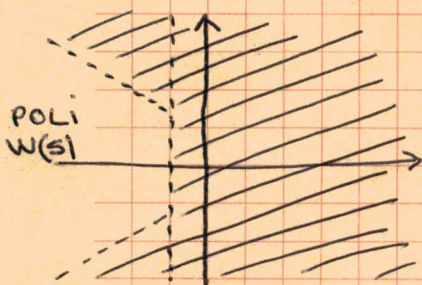
P20

Se  $\omega \in [0, \omega_c]$  campionando non ho questo fenomeno. Questo fenomeno è importante perché nella estrazione si misura il segnale che è affetto da un rumore a frequenza maggiore e c'è il rischio che il disturbo non si distingua dall'uscita con il campionamento. Per questo ci sono opportuni filtri che eliminano i disturbi. Più piccolo è il passo di campionamento  $\delta$ , più grande è  $\omega_c$  e riesce a distinguere.

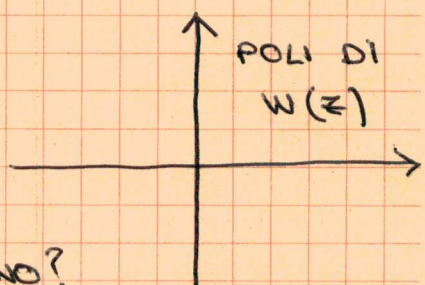
#### 4 La risposta transitoria nei sistemi di controllo a tempo discreto

Così come per il tempo continuo, anche per il discreto assume un ruolo importante la risposta transitoria. Per fare questo è fondamentale comprendere il rapporto tra la T. di Laplace e la Tz. Zeta.

CONTINUO



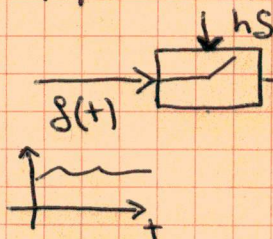
DISCRETO



?

COME SI TRASFORMANO?

oss:



$$g_c(t) = f(t) \sum_{h=0}^{\infty} \delta(t - h\delta)$$

→ Tasse di impulsi  
La si vede come una funz. continua che vale zero nelle parti dove non ci sono impulsi.

Pierre Cardin



P21

Facciamo la Tragg. di Laplace

$$F_c(s) = \mathcal{L}[g_c(t)] = \mathcal{L}\left[g(t) \sum_{h=0}^{\infty} s_0(t-hs)\right] =$$

$$\mathcal{L}[s_0(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[s_0(t-hs)] = e^{-hs} s$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} g(hs) e^{-hs} s$$

Se tratto la funzione come discreta  $g'_c(s) = g_c(hs) = g(hs)$  e me faccio la Trasformata Zeta si ottiene

$$F(z) = \mathcal{Z}[g(hs)] = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{g(hs)}{z^h} = \sum_{h=0}^{\infty} g(hs) z^{-h}$$

$F_c(s)$  è uguale a  $F(z)$  quando  $z = e^{sT}$

Proviamo a trovare la trasformazione da  $z$  a  $s$ . Intanto diciamo che non è biunivoca in generale. Supponiamo che

$$s = G + j\omega \quad |z| \quad \mathcal{L}z$$

$$z = u + jv = e^{s(G+j\omega)} = e^{\overset{|z|}{sG}} \cdot e^{j s \omega} =$$

$$= e^{sG} [\cos(s\omega) + j \sin(s\omega)] =$$

$$= e^{sG} \cos(s\omega) + j e^{sG} \sin(s\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$u = e^{sG} \cos(s\omega)$$

$$v = e^{sG} \sin(s\omega)$$

Pierre Cardin



P22

Vediamo perché non è biunivoca.  
 $s w$  è periodica con periodo  $2\pi$ .

$$s_1 = \sigma + j\omega$$

$$s_2 = \sigma + j\left(\omega + \frac{2\pi}{s} K\right) \quad K=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

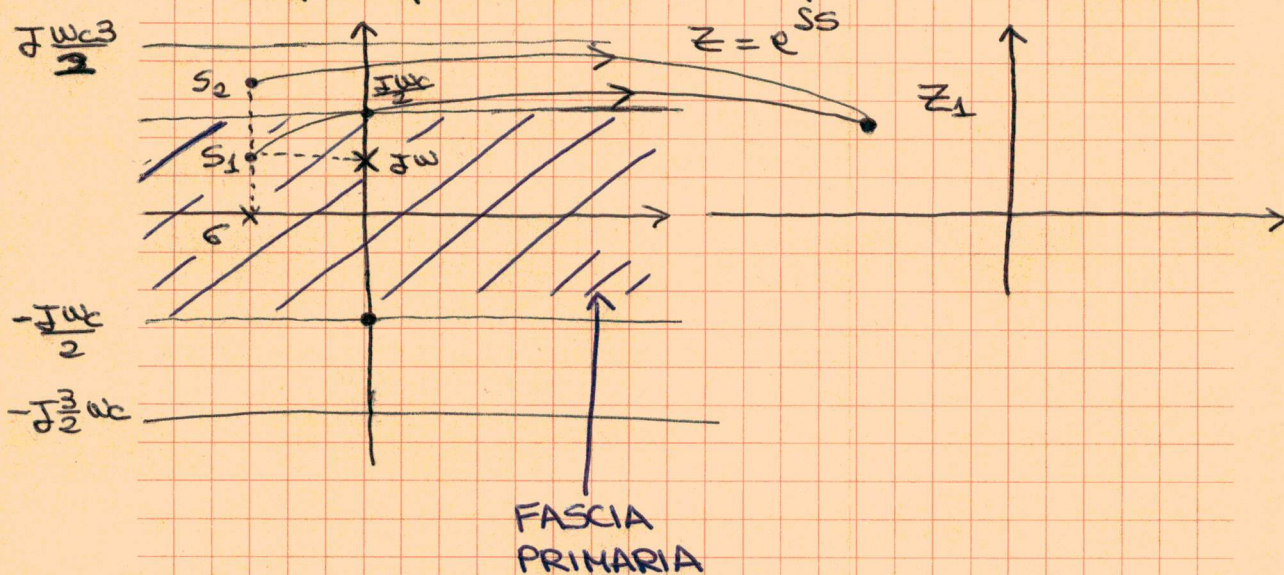
$$\downarrow$$

$$z_1 = e^{s(\sigma + j\omega)}$$

$$z_2 = e^{s(\sigma + j(\omega + \frac{2\pi}{s} K))} =$$

$$= e^{s\sigma} e^{j(s\omega + 2\pi K)} = e^{s\sigma} e^{j s \omega} = z_1$$

Quindi a più poli mi corrisponde lo stesso  $z$



Il piano si suddivide in tante fasce. Se il passo di campionamento è sufficientemente piccolo, i.e.  $\omega_c$  sia sufficientemente grande per far sì che tutti i poli della  $P(s)$  siano in questa fascia, la corrispondenza diventa biunivoca.

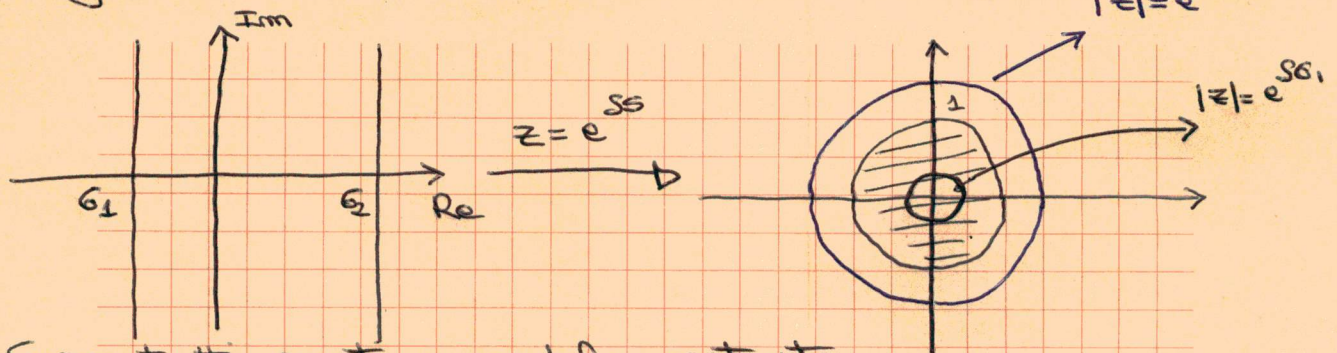
Si usa pertanto a campionare bene i segnali del sistema e non ci sono disturbi.

Piero Cardin



23

Trasformazione di rette parallele all'asse  $\text{Im}$

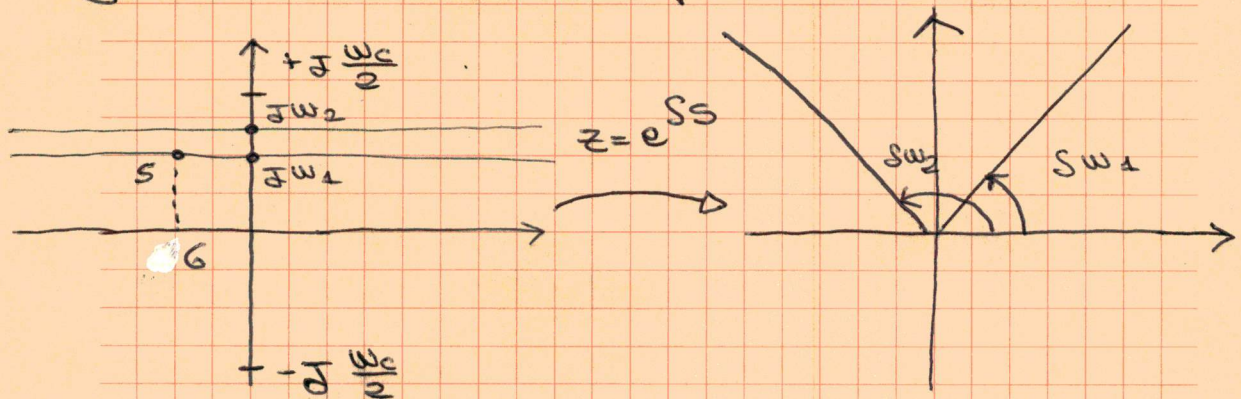


Sono tutti punti a modulo costante.  
L'Asse immaginario si trasforma nel cerchio unitario.

$$e^{\sigma_1 T} \leq 1 \leq e^{\sigma_2 T}$$

$$\sigma_1 \leq 0 \quad \sigma_2 \geq 0$$

Trasformazione delle rette parallele all'asse  $\text{Re}$



Sono tutti punti a fase costante

Vediamo cosa succede al variare dello smorzamento

$\xi = \sin \theta$        $\omega_m = \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}$        $\omega_c = \frac{2\pi}{T}$

$$\sigma = -\omega \sin \theta = -\omega \xi = -\frac{\omega \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{1}{\omega_c} \cdot \frac{2\pi}{T} =$$

$$= -\frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_c} \cdot \frac{1}{T}$$

$$\omega = \omega_m \cos \theta = \sqrt{1-\xi^2} \omega_m$$

Pierre Cardin



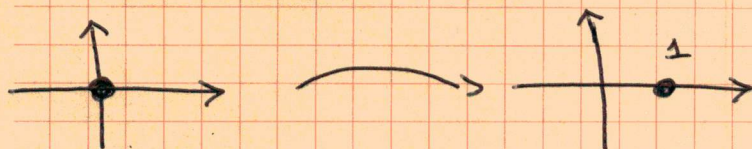
P25

$$z = w + jV = e^{\sigma(\sigma + j\omega)} = e^{\sigma\sigma} \cdot e^{j\sigma\omega} =$$

$$= \underbrace{e^{\frac{-2\pi\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_c}}}_{|z|} \cdot \underbrace{e^{j \frac{2\pi\omega}{\omega_c}}}_{\angle z}$$

l'unica cosa che varia è  $\omega$

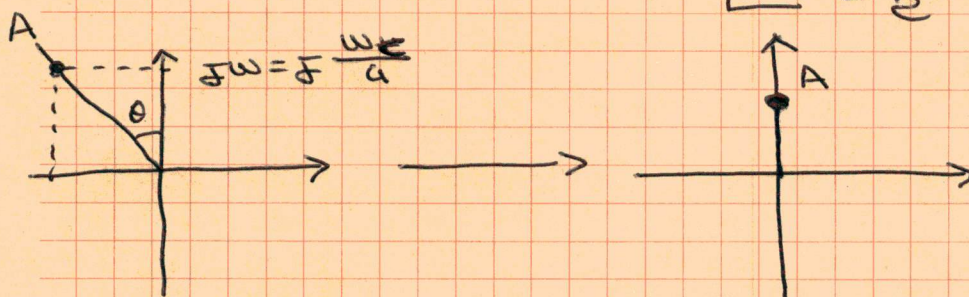
Che succede se  $\omega = 0$ ? Nel continuo siamo nell'origine, nel discreto  $|z| = 1$



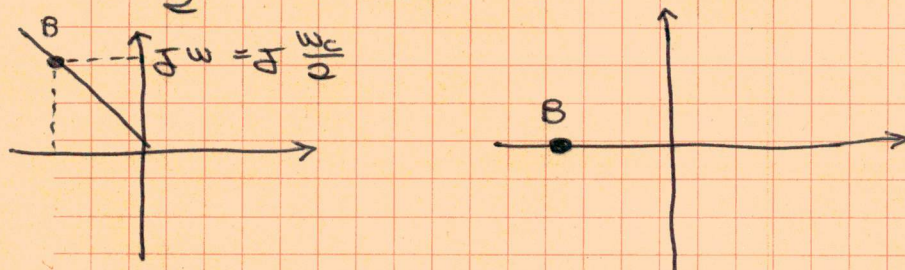
Se  $\omega = \frac{\omega_c}{a} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{1}{a} \Rightarrow$

$$|z| = e^{-\frac{\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \cdot \frac{\pi}{a}}{2}} = A$$

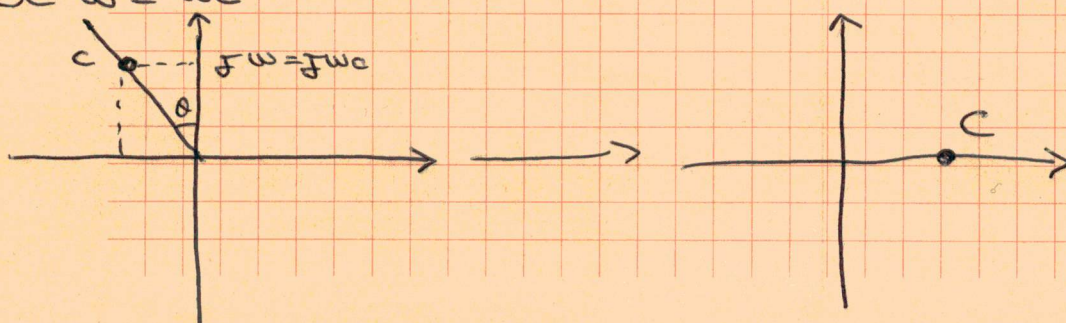
$$\angle z = \frac{\pi}{2}$$



Se  $\omega = \frac{\omega_c}{2}$   $\angle z = \pi$ ,  $|z| = B$



Se  $\omega = \omega_c$

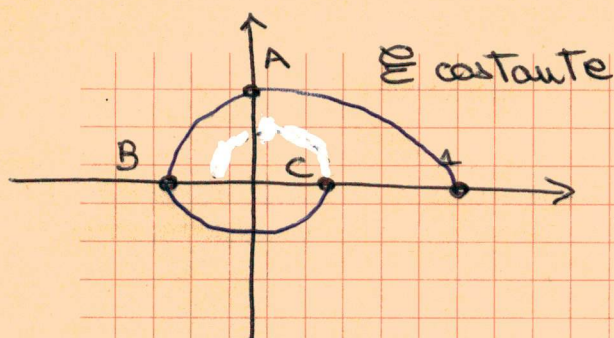


Pierre Cardin



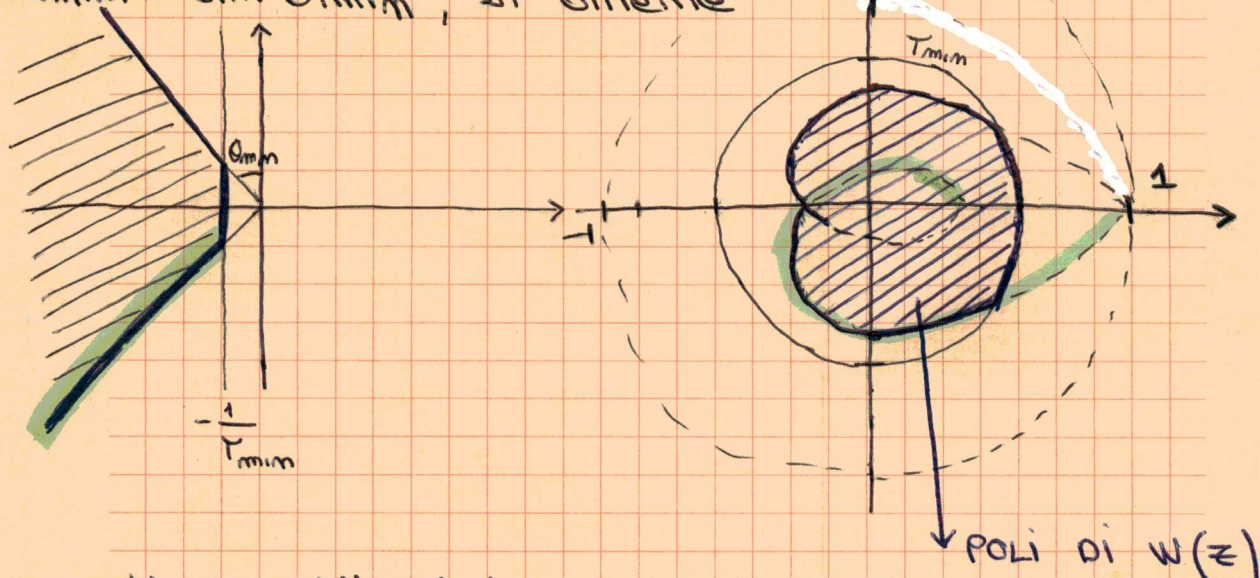
P26

Unendo tutti i punti si ottiene



Se, come nel caso continuo, si richiede  $\frac{1}{T_{min}}$  e

$E_{min} = \dim \Theta_{min}$ , si ottiene



OSS: abbiamo detto che la corrispondenza è biunivoca e fa capo zfforamento alla fascia primaria.

A cosa corrisponde la fascia primaria in  $z$ ?

L'andamento oscillante nel discreto corrisponde ad un andamento pseudoperiodico nel continuo.

I sistemi tempo continuo vanno a zero asintoticamente, i sistemi tempo discreto vanno a zero in un tempo finito.

Piero Carlini



## 5 Sintesi di sistemi a tempo di risposta finito

Transitorio nel continuo

↓  
 $t_s$

↑  
 $\hat{s}$

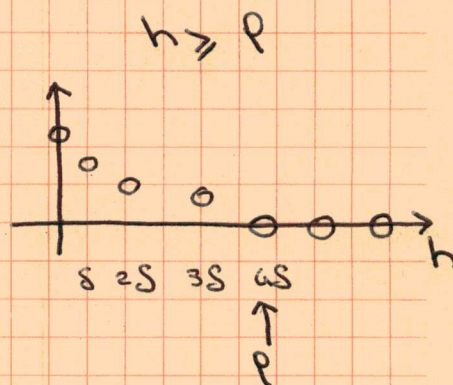
Non troviamo asintoto nel  
discreto

A  $t$  discreto è possibile caratterizzare il transitorio con il numero meno della risposta in tempo finito.

Per esempio

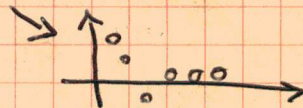
$$e(h) = K_d u(h) - y(h) = 0$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{y_d(h)}$



$$\begin{aligned} Z[e(h)] = E(z) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{e(h)}{z^h} = e_0 + \frac{e_1}{z} + \dots + \frac{e_{p-1}}{z^{p-1}} + 0 + 0 = \\ &= \frac{e_0 z^{p-1} + e_1 z^{p-2} + \dots + e_{p-1}}{z^{p-1}} = \frac{N(z)}{z^{p-1}} \rightarrow \text{Polinomio grado } p-1 \end{aligned}$$

Se avessimo avuto un gradino in ingresso il sistema sarebbe di tipo 1. Se avessimo avuto un errore costante  $\neq 0$ , il sistema sarebbe stato di tipo 0.



Rifacendo i passaggi in generale

$$\begin{aligned} Z[e(h)] &= e_0 + \frac{e_1}{z} + \dots + \frac{e_{p-1}}{z^{p-1}} + \frac{e_p}{z^p} + \frac{e_p}{z^{p+1}} + \dots = \\ &= \frac{e_0 z^{p-1} + \dots + e_{p-1}}{z^{p-1}} + \frac{e_p}{z^p} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{N(z)}{z^{p-1}} + \frac{e_p}{z^p} \cdot \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$



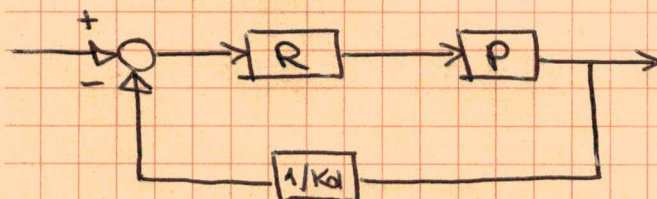
Riassumendo

28

TIPO 0  $E(z) = \frac{N(z)}{z^{p-1}} + \frac{e_p}{z^p} \frac{z}{z-1} = \underbrace{\frac{(z-1)N(z) + e_p}{z^p}}_{W_e(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$

TIPO 1  $E(z) = \frac{N(z)}{z^{p-1}} = \underbrace{\frac{(z-1)N(z)}{z^p}}_{W_e(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$

oss : ci sono  $p$  poli nell'origine e uno zero in uno nel ramo diretto.



$$W_e(z) = \frac{K_d}{1 + \frac{R_P}{K_d}} = \frac{K_d R_D R_P}{*}$$

Nel disotto vediamo i metodi di sintesi visti per il cont. = meo. Usiamo, ora, il metodo di sintesi diretta.

Si vuole imporre che il sistema sia di tipo 1

$$W_e(z) = \frac{(z-1)N(z)}{z^p}$$

La differenza tra i sistemi di tipo 1 e quelli con tempo di risposta finito: nel tipo 1 a R.P. l'errore è nullo, nel secondo si vuole imporre l'istante di tempo  $p$  l'errore è nullo ed  $p$  è più piccolo possibile.

$$1 + \frac{R_P}{K_d} = \frac{K_d}{W_e(z)} = \frac{K_d z^p}{(z-1)N(z)}$$

$$\frac{R_P}{K_d} = \frac{K_d z^p}{(z-1)N(z)} - 1 = \frac{K_d z^p - (z-1)N(z)}{(z-1)N(z)}$$

Pierre Cardin



P29

$$R(z) = \frac{K_d}{P(z)} \cdot \frac{K_d z^p - (z-1)N(z)}{(z-1)N(z)}$$

oss: devo poter cancellare la  $P(z)$ , questa cosa potrebbe creare problemi di instabilità.

Un altro problema è quello della realizzabilità

$$R(z) = \frac{K_d}{P(z)} \cdot \frac{K_d z^p - (z-1)N(z)}{(z-1)N(z)} \begin{matrix} \xrightarrow{m, \text{POLI DI } P} \\ \xrightarrow{m, \text{ZERI DI } P} \end{matrix} \begin{matrix} \} \rightarrow p \text{ ZERI} \\ \} \rightarrow p \text{ POLI} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{POLI DI } R(z) \quad m_R = m+p \\ \text{ZERI DI } R(z) \quad m_R = m+p \end{array} \right\} \begin{array}{l} m_R - m_R \geq 0 \\ \text{Cosa non va} \\ \text{perché } m_R - m_R = m-m \end{array}$$

Cosa si può fare? Il grado di libertà è la  $N(z)$ .

Impongo  $e_0 = \dots = e_{p-1} = K_d$

$$\begin{aligned} \text{NUM DI } R(z) & \quad K_d z^p - (z-1) K_d (z^{p-1} + \dots + z + 1) = \\ & = \dots = K_d \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo ottenuto il grado più basso possibile

$$\left. \begin{array}{l} m_R = m+p \\ m_R = m \end{array} \right\} \begin{array}{l} m+p-m \geq 0 \\ p \geq m-m = p_{\min} \end{array}$$

Per i sist. campionati  $p_{\min} = 1$

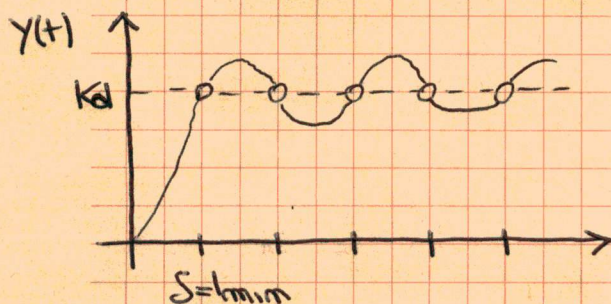
$$R(z) = \frac{K_d}{P(z)} \cdot \frac{K_d}{K_d(z^1 - 1)} = \frac{K_d}{P(z)} \cdot \frac{1}{z^{m-m} - 1}$$

Pierre Cardin



P30

Quando ho un sistema campionato dopo un solo istante di tempo ho  $y(h) = K_d S_{-1}(t)$



A noi PERO' interessa nel tempo continuo,  $\forall t$  e non solo negli istanti di campionamento. Si può fare, però non da  $p_{min}$ , ma da un istante più grande. Vediamo come.

Consideriamo un ingresso a gradino

$$S_{-1}(h) = 1 \quad \forall h$$

Si chiedono due condizioni

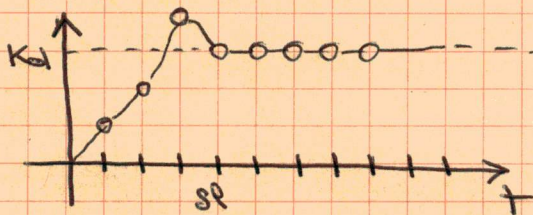
1)  $e(h) = 0$  per  $h \geq p$

2)  $u(h) = \underbrace{p^* K_d}_{\text{costante}}$  per  $h \geq p$  dove  $p^* = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{P(s)}$

oss:  $P(h)$  ha un polo in  $s=0$ ,  $p^* = 0$

Vogliamo dimostrare che  $\Rightarrow$  vogliamo 1) e 2)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t) = K_d \quad \forall t \geq p \quad (\text{RISPOSTA PIATTA})$$



Per mancanza di tempo non vediamo la dimostrazione del teorema sulle condizioni 1) e 2).

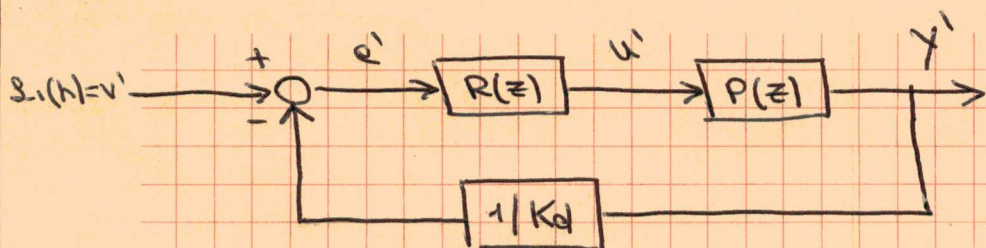
Vediamo, invece, di trovare un controllore che mi assicuri il tipo di risposta.

Piero Cardin



P31

Dato lo schema



- ①  $e'(h)=0 \quad h \geq p$   
②  $u'(h)=p * Kd \quad h \geq p$
- $\iff$  ③  $D_F(z) + N_F(z) = z^p$
- oss:  $W(z) = \frac{RP}{1+F} = \frac{*}{D_F + N_F} \rightarrow$  deve avere tutti i poli in zero
- ④  $R(z)$  non cancella zero di  $P(z)$
- ⑤  $D_F(z)$  POLO IN  $z=1$  (CNEs affinché il sistema sia tipo 1)

Per ora non ci soffermiamo sulla dimostrazione, bensì si fa vedere come si costruisce  $R(z)$  nel caso generale, caso che complica i calcoli (megli esercizi è più semplice).

Si distinguono due casi.

**CASO I**  $P(z)$  non ha polo in  $z=1$

$$P(z) = \frac{(b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0)}{(z^r + a_{r-1} z^{r-1} + \dots + a_1 z + a_0)} \xrightarrow{\bar{N}_P} \bar{D}_P$$

POLE DI  $P$  che  $R$  può cancellare (dentro cerchio unitario)

$$R(z) = \frac{(d_s z^s + \dots + d_1 z + d_0) M(z)}{(z-1) (z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0)} \xrightarrow{\bar{D}_R}$$

$\bar{N}_R$

Si impone  $D_F + N_F = z^p$

$$R = \frac{\bar{N}_R M}{\bar{D}_R} \quad P = \frac{\bar{N}_P}{\bar{D}_P M}$$

Pierre Cardin



P32

$$F = \frac{RP}{K_d} = \frac{\overline{N_R} \overline{N_P}}{\overline{D_R} \overline{D_P} K_d} = \frac{\frac{\overline{N_R} \overline{N_P}}{K_d}}{\overline{D_R} \overline{D_P}} = \frac{N_F}{D_F}$$

$$N_F + D_F = z^p = \overline{D_R} \overline{D_P} + \frac{1}{K_d} \overline{N_R} \overline{N_P} =$$

$$= (z-1) (z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0) (z^r + a_{r-1} z^{r-1} + \dots + a_1 z + a_0) + \frac{1}{K_d} (d_s z^s + \dots + d_1 z + d_0) (b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0)$$

oss:

$$m - m = 1 \quad P(z) \quad \text{con } m = r + \text{grado}(H)$$

R la vogliamo proprio perché vogliamo il maggior numero di parametri e più gradi di libertà

$$s + \text{grado}(H) = m + 1$$

e combiniamo

$$s + m - r = m + 1 \Rightarrow \boxed{m + r + 1 = m + s}$$

Continuando i calcoli e raccogliendo i fattori si ottiene

$$\begin{aligned} & z^{m+r+1} + \left( \frac{d_s b_{m-1}}{K_d} + c_{m-1} - 1 + a_{m-1} \right) z^{m+s-1} + \dots + \\ & + \left( \frac{d_0 b_1}{K_d} + \frac{d_1 b_0}{K_d} - c_0 a_1 - c_1 a_0 + c_0 a_0 \right) z + \left( \frac{d_0 b_0}{K_d} - c_0 a_0 \right) = z^p \end{aligned}$$

Pierre Cardin



P33

Si deve quindi imporre

$$\begin{cases} \frac{d s b_{m-1}}{K_d} + c_{m-1} - 1 + a_{m-1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{d b_0}{K_d} - c_0 a_0 = 0 \end{cases}$$

$$m + r + 1 = m + s \quad \text{equazioni}$$

$$\begin{matrix} m + s + 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ c_1 \quad d_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{incognite} \\ \text{(potremmo fissare} \\ c_1 \text{ e } d_1) \end{matrix}$$

Il sistema è risolubile se

$$m + s + 1 \geq m + r + 1 \Rightarrow \boxed{s \geq r}$$

$r$  è la dimensione del denominatore di  $P(z)$  da non viene cancellata da  $R$ , quindi è giusta.

In genere si prende  $s = r$

$$R(z) = \frac{(d_s z^s + \dots + d_0) M(z)}{(z-1) \bar{R}(z)}$$

Polinomio di grado  
 $m = s + \text{grado}(M) - 1$

esempio

$$P(z) = \frac{z + 0.5}{(z+2)(z-0.5)} \Rightarrow R(z) = \frac{(d_1 z + d_0) (z-0.5)}{(z-1)(z+c_0)}$$

$s = r = 1$

ponendo  $K_d = 1$

$$(z+2)(z-1)(z+c) + (z+0.5)(d_1 z + d_0) = z^p = z^3$$

$p = 3$

$$z^3 + (c-1)z^2 - cz + 2z^2 + 2(c-1)z - 2c + (d_1 z^2 + d_0 z + 0.5 d_1 z + 0.5 d_0) = z^3$$

Pierre Cardin



P36  
Si ottiene il sistema 3 equazioni e 3 incognite  $(a_0, b_0, c_0)$ .

Abbiamo detto che

$$\bar{D}_R \bar{D}_P + \frac{1}{K_d} \bar{N}_R \bar{N}_P = \dots = z^p$$

quindi

$$p = m + r + 1 = m + s$$

$p \geq m$ , per  $s=0$  si ottiene il valore di  $p$  più piccolo possibile.

$s=0$  si ha quando  $r=0$  dato che  $s=r$ .

$r=0$  quando posso cancellare tutti i poli di  $P$ .

$s=0 \iff M(z) = D_P(z)$  cioè  $P$  ha tutti i poli nel cerchio unitario.

CASO 2  $P(z)$  ha un polo in  $z=1$

$$P(z) = \frac{(b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0)}{(z-1)(z^r + a_{r-1} z^{r-1} + \dots + a_0) M(z)}$$

$\nearrow \bar{N}_P(z)$

$\nearrow \bar{N}_R$        $\nearrow \bar{D}_P(z)$

$$R(z) = \frac{(d_s z^s + \dots + d_0) M(z)}{(z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_0)}$$

$\searrow \bar{D}_R$

$$m = r + 1 + \text{grado}(M) = r + 1 + m - s$$

$$s + \text{grado}(M) = m$$

$$m + r + 1 = s + m$$

la relazione è uguale, ma il significato è diverso.



$$D_F + N_F = z^p$$

$$\overline{D}_R \overline{D}_P + \frac{1}{K_d} \overline{N}_R \overline{N}_P = z^{m+r+1} + \dots \textcircled{*} \dots = z^p$$

$$p = m + r + 1 = m + s$$

$$p \geq m$$

Si impone  $\textcircled{*} = 0$  e si ottengono

$m+r+1$  equazioni

$$m+s+1 \text{ incognite} \Rightarrow m+s+1 \geq m+r+1 \Rightarrow s \geq r$$

Per avere un'unica soluzione si prende  $s=r$ .  
Per la risposta minima, in modo analogo, si  
ottiene

$$s=r=0 \Rightarrow p=m$$

L'unica differenza tra i due casi è che si ha quando  
la  $P(z)$  ha tutti i poli nel cerchio unitario, tranne  
uno che sta in uno.

esempio  $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ , costruisce un sistema

per risposta piatta.

$$P(z) = \frac{az+b}{(z-1)(z-e^{-s})} \quad \text{con } s=1$$

$$r=0 \Rightarrow s=0 \quad H(z)$$

$$\Downarrow \\ p=m=2$$

$$R(z) = \frac{d_0(z-e^{-1})}{z+c_0}$$

Si imposta il sistema 2 eq. e 2 incognite.



P36

$$(z+c_0)(z-1) + (az+b) = z^2$$

$$\begin{aligned} K_d &= 1 \\ p &= z \end{aligned}$$

$$z^2 + (c_0-1)z - c_0 + a z + b = z^2$$

$$\begin{cases} c_0 - 1 + a = 0 \\ -c_0 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow c_0, b$$

Oss: Criterio di Routh  $\longleftrightarrow$  Criterio di JURY